Clase 19: Continuación

Peter Hummelgens

16 de diciembre de 2006

La función $1(x) := 1; \quad -\infty < x < \infty$ es acotado, por lo tanto define una distribución atemperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. tenemos

$$\begin{aligned} < \hat{1}(\omega), \varphi(\omega) > &= < 1(\omega), \hat{\varphi}(\omega) >= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\cdot 0\cdot\omega}\hat{\varphi}(\omega)d\omega = \quad \text{(fórmula de inversión)} \\ &= \varphi(0) =< \delta(\omega), \varphi(\omega) > \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de modo que

$$1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\omega) \tag{1}$$

1. La TF inversa.

Definimos $\overline{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})(\varphi \longrightarrow \check{\varphi})$ por

$$(\overline{\mathcal{F}}\varphi)(\omega) = \check{\varphi}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\varphi(x)dx; \quad -\infty < \omega < \infty(\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})). \tag{2}$$

Tenemos para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$,

$$(\overline{\mathcal{F}}\hat{\varphi})(a) \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\omega}\hat{\varphi}(\omega)d\omega \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Además

$$\begin{aligned} e^{ia\omega}\hat{\varphi}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-a)}\varphi(x)dx \overset{t=x-a}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi(t+a)dt \\ &= \widehat{\varphi(x+a)}(\omega), \end{aligned}$$

de modo que (3) da

$$\begin{aligned}(\overline{\mathcal{F}}\hat{\varphi})(a) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi(x+a)}(\omega)d\omega \\ &= <1(\omega), \widehat{\varphi(x+a)}(\omega)>=<\hat{1}(\omega), \varphi(\omega+a)>=<\delta(\omega), \varphi(\omega+a)>=\varphi(a),\end{aligned}$$

y como $a \in \mathbb{R}$ era arbitrario comprobamos que

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ \text{ y similarmente se demuestra} \\ \text{que}\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi) = \varphi, \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \qquad\qquad\qquad \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Por supuesto (3) no es otra cosa que la fórmula de inversión $\hat{\varphi}(\omega) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longrightarrow} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\hat{\varphi}(\omega)d\omega$ y (3) dice que $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$. Definimos ahora para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\overline{\mathcal{F}}T = \check{T}$ por

$$<\check{T}, \varphi>:=<T, \check{\varphi}>; \quad \varphi \in (\mathbb{R}). \tag{4}$$

Es claro que $\check{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y queremos ahora verificar que

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T) = T = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}T), \ \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \tag{5}$$

De hecho tenemos $<\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T), \varphi> \stackrel{(4)}{=} <\mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}\varphi>=<T, \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi)> \stackrel{(3)}{=} <T, \varphi>$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces $\overline{F}(\mathcal{F}T) = T$. De manera similar vemos que $\mathcal{F}(\mathcal{F}T) = T$, y comprobemos (5). Como consecuencia podemos decir

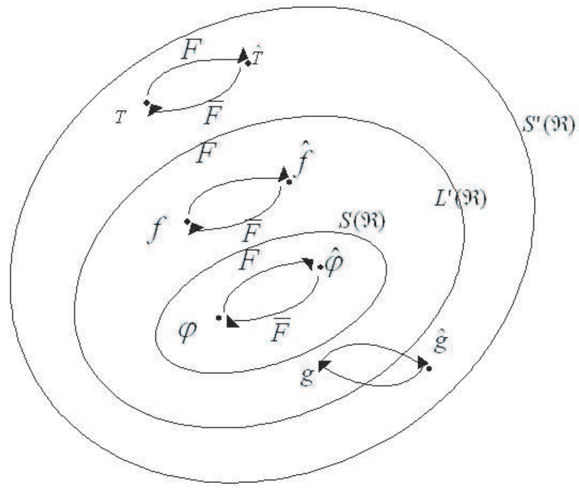
$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{F}\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \text{es una biyección con inversa} \\ &\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

y cada relación $T \stackrel{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \hat{T}$ es en el mismo momento una relación para la TF inversa $\hat{T} \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longrightarrow} T$. Como consecuencia de (5) tenemos para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ que

$$\mathcal{F}T = 0 \iff T = 0 \tag{7}$$

ya que la parte $\Longleftarrow$ es trivial y $\mathcal{F}T = 0 \Longrightarrow T \stackrel{(5)}{=} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}^{-1}(0) = 0$ ($\mathcal{F}^{-1}$ es lineal).

Hemos llegado ahora a la situación siguiente:



Mejor no se puede: en $\mathcal{S}'(\mathcal{R})$ podemos tomar alegremente TF, TF repetidas y TF inversas sin salir nunca de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Para la TF repetida tenemos

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies (\mathcal{F}(\mathcal{F}f))(x) = \frac{1}{2\pi} f(-x) \tag{8}$$

porque

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{\varphi}(\omega) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} \hat{\varphi}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \varphi(-x)$$

y ahora para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x), \varphi(x) > &= < (\mathcal{F}f)(\omega), (\mathcal{F}\varphi)(\omega) >=< f(x), (\mathcal{F}(\mathcal{F}f))(x) > \\ &= < f(x), \frac{1}{2\pi} \varphi(-x) >= \frac{1}{2\pi} < f(x), \varphi(-x) >= \frac{1}{2\pi} < f(-x), \varphi(x) > \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ lo que demuestra (8).

Ejemplo 1. *(a) En la clase 17 vimos que* $X_a(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -a < x < a \\ 0 & ; \quad \textit{otro } x \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\pi\omega}$.

Con (8) tenemos ahora

$$X_a(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\pi\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X_a(-x) = \frac{1}{2\pi} X_a(x),$$

por lo tanto

$$\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} X_a(\omega), \quad a > 0$$

(en la Clase 17 no teníamos todavía una TF para $\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$*).*

(b) Para $a > 0$,

$$e^{-a|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)} \quad \textit{(Clase 17), y con (8) entonces}$$

$$e^{-a|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2pi} e^{-a|x|}, \quad \textit{de modo que}$$

$$\frac{2a}{x^2 + a^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-a|\omega|}, \quad a > 0.$$

Dejamos como ejercicio verificar que

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies (\mathcal{F}^{-1} f)(\omega) = 2\pi(\mathcal{F} f)(-\omega). \tag{9}$$

El ejemplo anterior sirve para ilustrar (9).

2. La TF en $L^2(\mathbb{R})$.

Tenemos $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, de modo que cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ es Fourier transformable. Un ejemplo de una función en $L^2(\mathbb{R})$ pero no en $L^1(\mathbb{R})$ es $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} ax}{x} (a > 0)$, cuya TF es (ver el ejemplo anterior) $\frac{1}{2} X_a(x)$. Recordemos que en $L^2(\mathbb{R})$ tenemos un producto interno

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx \,; \; f, g \in L^2(\mathbb{R}). \tag{10}$$

Tenemos el resultado siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \;\; \text{es una biyección, y} \\ \|f\|^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \|\hat{f}\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \tag{11}$$

(fórmula de Parseval para la TF), y más generalmente

$$(f, g) \overset{10}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \overset{(10)}{=} 2\pi(\hat{f}, \hat{g}) \tag{12}$$

(fórmula de Plancherel-Parseval).

Ejemplo 2. *(a) Sea* $\hat{f}(\omega) = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}$; $-\infty < \omega < \infty$. *Del ejemplo anterior sabemos que*

$$f(x) = \pi X_1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega)$$

Como $f \in L^2(\mathbb{R})$, *tenemos* $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ *por(11), y por (11) también tenemos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \pi,$$

es decir, encontramos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2} dt = \pi,$$

un resultado que costaría <u>*mucho más*</u> *trabajo con los métodos de variable compleja (Mat. VI, integración en el plano complejo, teorema de residuos de Cauchy,$\cdots$ etc.)*

(b) Sea $\hat{f}(\omega) = \frac{1-e^{-ix\omega}}{i\omega}$; $-\infty < \omega < \infty$ $(a > 0)$. *Tenemos*

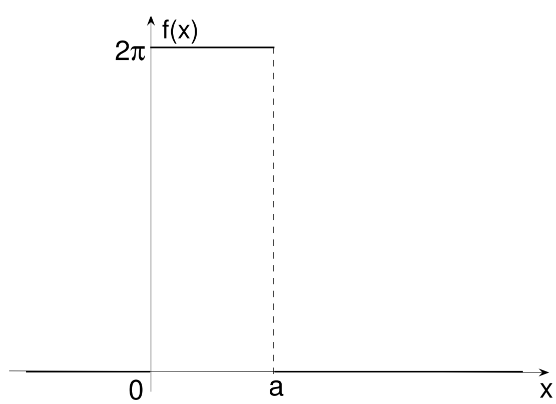
$$i\omega\hat{f}(\omega) = 1 - e^{-ia\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f'_{gen}(x) = 2\pi\delta(x) - 2\pi\delta_a(x)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = 2\pi[h(x) - h(x-a)] + c$$

con c una constante. Pero $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \overset{11}{\Longrightarrow} f \in L^2(\mathbb{R})$, *de modo que necesariamente* $C = 0$ *es decir,*

$$f(x) = 2\pi[h(x) - h(x-a)],$$

con gráfica



Entonces según (12),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|1 - e^{-iat}|^2}{t^2} dt = \frac{1}{2\pi} 4\pi^2 a = 2\pi a, \quad a > 0.$$

Más ejemplos de la aplicación de (11), (12) se presentan en la guía del Profesor P.F. Hummelgens.

Mencionamos sin demostración el resultado siguiente:

Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-A}^{A} e^{-i\omega x} f(x)dx \xrightarrow{\|\,\|} \hat{f}(\omega), \\ \displaystyle\int_{-A}^{A} e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)d\omega \xrightarrow{\|\,\|} f(x) \text{ cuando } A \to \infty \end{array}\right\} \tag{13}$$

donde la segunda afirmación es una <u>versión de la fórmula de inversión</u> para la TF en $L^2(\mathbb{R})$ Este resultado se llama el <u>teorema de Plancherel</u>. También mencionamos que la fórmula de la convolución es válido en $L^2(\mathbb{R})$:

$$\left.\begin{array}{l} f, g \in L^2(\mathbb{R}) \implies f(x) * g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \\ \text{donde } \hat{f}\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}). \end{array}\right\} \tag{14}$$

3. TF de distribuciones par o impar.

De (10) de la Clase 18, $< f(ax), \varphi(x) >:=< f(x), \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right) >$ tenemos $< f(-x), \varphi(x) >=< f(x), \varphi(-x) >$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Decimos que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es par (o impar) si, y sólo si, $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = f(x)$).

Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par, entonces

$$\begin{aligned} < \hat{f}(-\omega), \varphi(\omega) > &= < \hat{f}(\omega), \varphi(-\omega) >=< f(\omega), \widehat{\varphi(-x)}(\omega) >= \text{(regla 7., Clase 18)} \\ &= < f(\omega), \hat{\varphi}(-\omega) >=< f(-\omega), \hat{\varphi}(\omega) >= (f \text{ par}) \\ &= < f(\omega), \hat{\varphi}(\omega) >=< \hat{f}(\omega), \varphi(\omega) > \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega)$, es decir, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par $\Longrightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par también. Es claro que entonces también $\hat{f}$ par $\Longrightarrow f$ par. Similarmente podemos proceder para f impar. Finalmente:

$$f(x) \text{ par} \iff \hat{f}(\omega) \text{ par}, \; f(x) \text{ impar} \iff \hat{f}(\omega) \text{ impar} \tag{15}$$

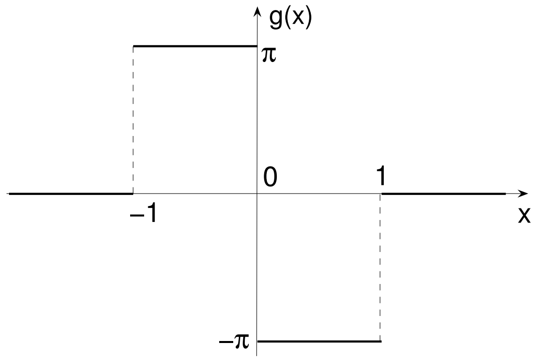
Ejemplo 3. *Queremos hallar* $f(x)$ *cuando* $\hat{f}\omega) = \dfrac{\cos\omega - 1}{i\omega}$. *Tenemos*

$$i\omega\hat{f}(\omega) = \cos\omega - 1 = \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) - 1$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f'_{gen}(x) = \pi\delta_{-1}(x) + \pi\delta_1(x) - 2\pi\delta(x)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \pi h(x+1) + \pi h(x-1) - 2\pi h(x) + C \;\; \textit{para cierta constante } C. \tag{16}$$

La gráfica de $g(x) = \pi h(x+1) + \pi h(x-1) - 2\pi h(x)$, *es*



$$\Longrightarrow \quad g(x) \;\; \textit{es impar.}$$

Sumando a $g(x)$ *una constante* $C \neq 0$ *resultará una función no impar. Pero* $f(x)$ *tiene que ser impar porque* $\hat{f}(\omega)$ *es impar. Así en (16) tenemos necesariamente* $C = 0$ $\Longrightarrow f(x) = \pi h(x+1) + \pi h(x-1) - 2\pi h(x)$.